विद्युतचुंबकत्व के नियम तथा उनकी उपयोगिता

आशुतोष कुमार शुक्ल

भौतिक विज्ञान विभाग,
यूइंग क्रिश्चियन महाविद्यालय,
इलाहाबाद, उ.प्र., 211003

drakshukla@gmail.com
9415612103

सारांश

मैक्सवेल ने बताया कि विद्युत और चुंबकत्व एक ही सिक्के के दो पहलू हैं. उन्होने विद्युतचुंबकत्व का एकीकृत सिद्धांत दिया. इसी से विद्युतचुंबकीय तरंगों के अस्तित्व का ज्ञान हुआ. इस प्रस्तुति में हम यह देखेंगे कि किस प्रकार मैक्सवेल समीकरणों से विद्युतचुंबकीय तरंग समीकरण प्राप्त किया जा सकता है. इस निगमन में उपयोगी गणितीय सूत्रों के विषय में भी चर्चा की जाएगी.

प्रस्तुति के पहले भाग में हम आंशिक अवकल समीकरणों के बारे में संक्षिप्त चर्चा करेंगे. इसके बाद अगले चरण में हम कर्ल, डाइवरजेन्स तथा ग्रेडियेंट से परिचित होंगे. उन सदिश सर्वसमीकाओं को भी समझेंगे जिनका उपयोग इस निगमन में किया जाएगा.

विद्युतचुंबकत्व के चार मूल नियम मैक्सवेल समीकरण कहे जाते हैं. इन चार नियमों के अवकल तथा समाकल रूपों से हम परिचित होंगे. यह भी समझने का प्रयास करेंगे कि अवकल प्रारूप समाकल की तुलना में सरल है.

प्रस्तुति के दूसरे भाग में मैक्सवेल समीकरणों से विद्युतचुंबकीय तरंग समीकरण प्राप्त करेंगे. तरंग गति के सामान्य समीकरण से तुलना द्वारा हम विद्युतचुंबकीय तरंगों की चाल के विषय में जानकारी प्राप्त करेंगे. इन तरंगों की गति माध्यम पर किस प्रकार निर्भर करती है, यह भी समझेंगे.

कर्ल

1. कर्ल एक संकारक(आपरेटर) है जो किसी त्रिविम सदिश क्षेत्र के घूर्णन का वर्णन करता है।

2. किसी क्षेत्र के प्रत्येक बिन्दु पर कर्ल को एक सदिश राशि द्वारा निरूपित किया जाता है।

3. कर्ल को गणितीय प्रतीक $\bar{\nabla} \times$ के रुप मे व्यक्त करते है।

डाइवरजेन्स

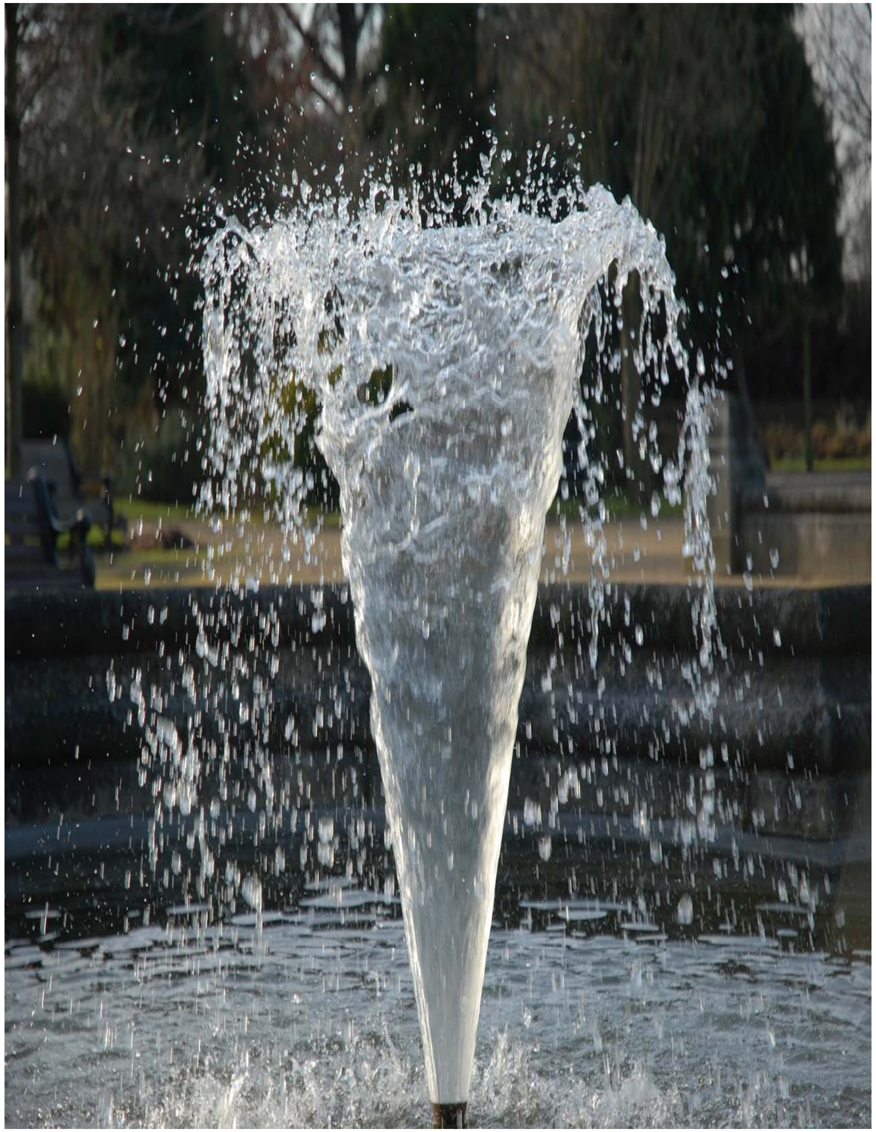
1.किसी त्रिविम क्षेत्र का डाइवरजेन्स उस क्षेत्र के किसी बिन्दु पर उसके स्त्रोत अथवा सिकं की तरह व्यवहार को व्यक्त करता है।

2. किसी त्रिविम सदिश क्षेत्र का डाइवरजेन्स इस प्रकार व्यक्त करते है:

$$\bar{\nabla}.\bar{F} = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right).(f_x\hat{x} + f_y\hat{y} + f_z\hat{z})$$

$$= \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial x} + \frac{\partial f_z}{\partial x}$$

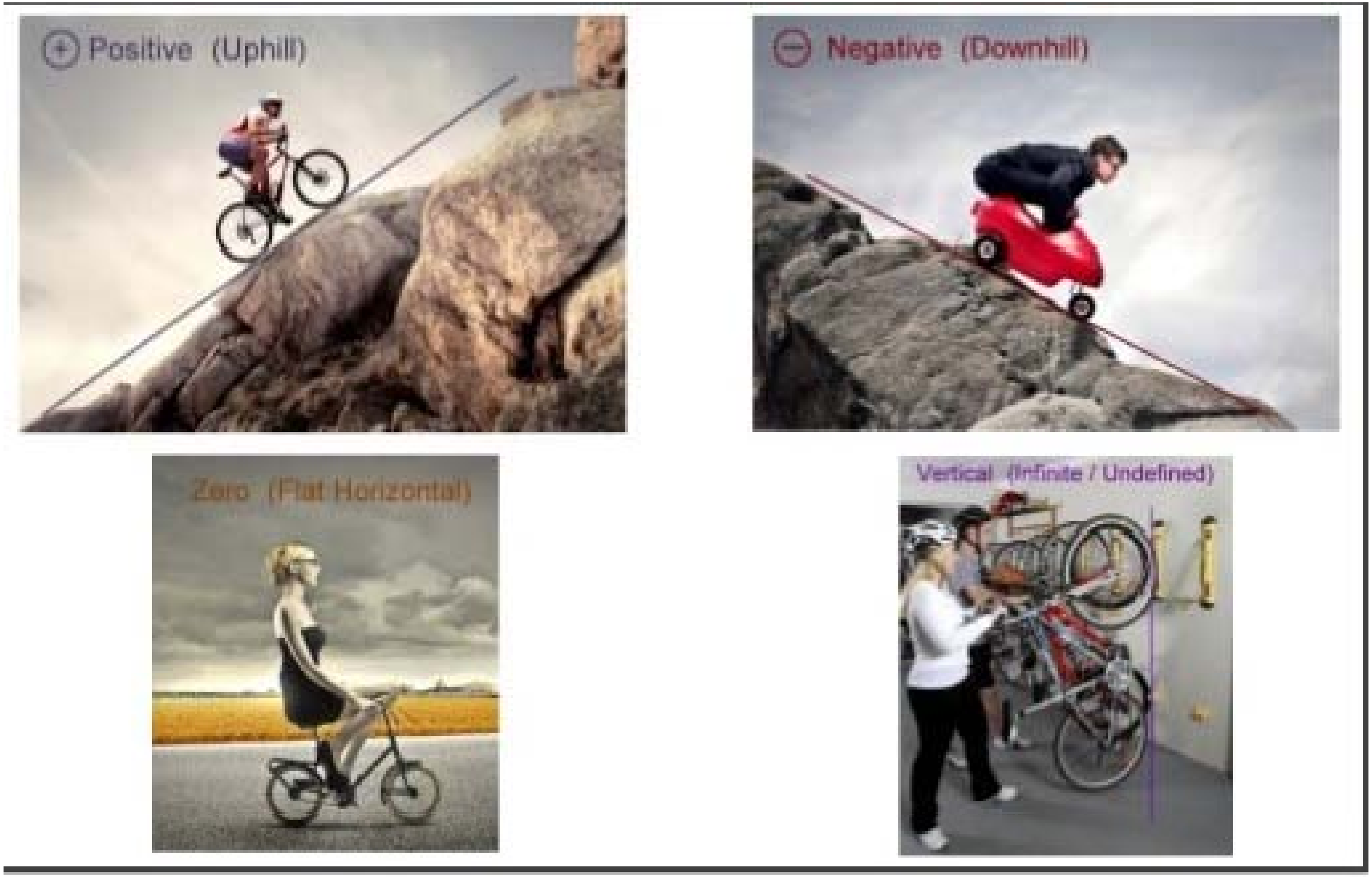
http://www.mstworkbooks.co.za/natural-sciences/gr8/gr8-ec-04.html



ग्रेडियंट

- किसी फलन का ग्रेडियंट उस फलन के सर्वाधिक ढाल की दिशा को प्रदर्शित करता है तथा उसका परिमाण उस ढाल परिमाण के के बराबर होता है।
- किसी फलन का ग्रेडियंट निम्न प्रकार से व्यक्त करते है:

$$\overline{\nabla} F \equiv \frac{\partial F}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial F}{\partial x}\hat{y} + \frac{\partial F}{\partial x}\hat{z}$$



http://math.stackexchange.com/questions/810171/direction-of-gradient-from-level-surface/810193

मैक्सवेल समीकरण

क्र. सं.	समीकरण का कथन	अवकल रूप	समाकल रूप
1	गाउस नियम : आवेशों से वैधुत क्षेत्र उत्पन्न होते हैं : वैधुत क्षेत्र रेखाएं आवेशों से प्रारंभ होती है ओर आवेशों पर समाप्त होती हैं।	$\overline{\nabla}.\overline{E} = \frac{q}{\epsilon_0}$	$\int_S \overline{E}.\overline{ds} = \frac{q}{\epsilon_0}$
2	फैराडे नियम : परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र से वैधुत क्षेत्र उत्पन्न होता है।	$\overline{\nabla} \times \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$	$\oint_C \overline{E}.\overline{dl} = -\frac{d\varphi_B}{dt}$
3	गाउस नियम : चुंबकीय क्षेत्र रेखाएं स्वयं पर बंद हो जाती है; वियुक्त चुंबकीय आवेश का अस्तित्व नहीं होता।	$\overline{\nabla}.\overline{B} = 0$	$\int_S \overline{B}.\overline{ds} = 0$
4	एंपीयर - मैक्सवेल नियम: वैधुत धारा और परिवर्ती वैधुत क्षेत्र से चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न होता है।	$\overline{\nabla} \times \overline{B} = \mu_0(\overline{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \overline{E}}{\partial t})$	$\oint_C \overline{B}.\overline{dl} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\varphi_E}{dt}$

निर्वात में मैक्सवेल समीकरण जबकि स्त्रोत आवेश या धारा ना हो

अवकल रूप	समाकल रूप
$\bar{\nabla}.\bar{E} = 0$	$\int_S \bar{E}.\overline{ds} = 0$
$\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$	$\oint_C \bar{E}.\overline{dl} = -\frac{d\varphi_B}{dt}$
$\bar{\nabla}.\bar{B} = 0$	$\int_S \bar{B}.\overline{ds} = 0$
$\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \in_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$	$\oint_C \bar{B}.\overline{dl} = \mu_0 \in_0 \frac{d\varphi_E}{dt}$

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \bar{B}) \tag{1}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{B}) = \nabla \times \left(\mu_0 \in_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\right) = \mu_0 \in_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \bar{E}) \tag{2}$$

अब हम किसी भी क्षेत्र सदिश $\bar{F}$ के लिए निम्नलिखित सदिश सर्वसमिका (vector identity) का प्रयोग करते हैं

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{F}) = \nabla(\nabla . \bar{F}) - \nabla^2 \bar{F}$$

इस तरह, इस सदिश सर्वसमिका के साथ समीकरण

$$\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \in_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

का प्रयोग करने पर समीकरण (1) से हमें मिलता है :

$$\nabla(\nabla.\bar{E}) - \nabla^2\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \bar{B}) = -\mu_0 \in_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}$$

क्योंकि समीकरण $\bar{\nabla}.\bar{E} = 0$ होता है, इसलिए

$$\nabla^2\bar{E} = \mu_0 \in_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}$$

इसी प्रकार समीकरण $\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ के साथ समीकरण (2) को लेने पर हमें मिलता है

$$\nabla(\nabla.\bar{B}) - \nabla^2\bar{B} = \mu_0 \in_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \bar{E}) = -\mu_0 \in_0 \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\bar{B} = \mu_0 \in_0 \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2}$$

Reference: Study material of Indira Gandhi National Open University

आभार

- अविनाश, भौतिकी परास्नातक छात्र, यूइंग क्रिश्चियन महाविद्यालय
- निवेदिता पान, भौतिकी परास्नातक छात्रा, यूइंग क्रिश्चियन महाविद्यालय

धन्यवाद